Поставленная задача включает в себя осуществление комплексного контроля знаний студента по трем основным разделам высшей математики. Остановимся на каждом разделе подробнее.

Студенты, в большинстве случаев, освоение программы высшей математики начинают с раздела «Линейная и векторная алгебра». Студент получает знания о матрицах, векторах и действиях над ними.

Затем первый раздел плавно перетекает в раздел «Аналитическая геометрия на плоскости и в пространстве». Теперь студент познает фигуры на плоскости и тела, заданные в пространстве.

Третьим разделом является раздел «Дифференциальное исчисление». Изучение данного раздела дает краткий курс по нахождению производной от разных видов функций.

Программный комплекс разработан с учетом требований балльно-рейтинговой системы и рассчитан на быстрый и наиболее полный контроль знаний по вышеперечисленным разделам.

SOFTWARE COMPLEX OF ANALYTICAL TESTING FOR ADVANCED MATHEMATICS, DEVELOPED BY USING CAS MAPLE AND ITS APPLICATION MAPLET

A.A. Osipov

Creation of software for analytical testing in some sections advanced mathematics in CAS Maple is described.

Keywords: integrated control, software package.

УДК 519.163+519.168+512.643

РАЗБИЕНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ МНОЖЕСТВА НА ПАРЫ: ГЕНЕРАЦИЯ И ПРИМЕНЕНИЕ

И.Н. Попов[1]

1 *only-for-you-pi@mail.ru*; Северный (Арктический) федеральный университет им. М.В. Ломоносова

В статье предложен теоретически обоснованный алгоритм генерации пар элементов множества, на основе которого составлена программа в СКМ Maple. Рассмотрена комбинаторная оптимизационная задача, решение которой ведется методом перебора, основанном на разбиении элементов множества на пары с представлением расчетов, полученных с применением представленных в работе компьютерных программ.

Ключевые слова: программирование, множество, комбинаторика.

Введение. В решении ряда комбинаторных задач приходится прибегать к разбиению объектов на пары, тройки и так далее. Одним из примеров является расположение людей в шеренги, «квадраты» или в «прямоугольники». Целью статьи является описание с проверкой на корректность алгоритма решения комбинаторной задачи о разбиении элементов конечного множества на пары. На основе теоретических выкладок составлена программа в СКМ Maple, генерирующая пары элементов множества. В статье рассмотрена задача, решение которой непосредственно связано с разбиением элементов множества на пары, и продемонстрировано применение компьютерных программ в решении задачи в конкретном случае.

Обзор литературы. Работа [1] посвящена вопросам комбинаторики. В работе [2] можно ознакомиться с эффективными алгоритмами для вычислений основных элементов комбинаторики. Основы работы в СКМ Maple изложены в работе [3]. Материал в работах [1, 2, 3] используется как в теоретической части статьи, так и в практической реализации. В статьях [4 ,5] изложен материал, связанный с демонстрационной задачей.

Теоретическая часть. Пусть N - множество натуральных чисел, $n \in N$.

Множество, содержащее n элементов, будем называть n-множеством.

Разбиение элементов $2n$-множества на пары равносильно представлению этого множества в виде объединения n его различных подмножеств, каждое из которых содержит два элемента, не учитывая расположение подмножеств в объединении. Последнее можно сделать следующим количеством способов:

$$\frac{C_{2n}^2 \cdot C_{2n-2}^2 \cdot C_{2n-4}^2 \cdot \ldots \cdot C_4^2 \cdot C_2^2}{n!} = \frac{(2n)!}{2^n \cdot n!},$$

где $C_m^k = \dfrac{m!}{k! \cdot (m-k)!}$ - число сочетаний m предметов по k штук, где $m, k \in N$ и $1 \le k \le m$.

Множество $\{1;2\}$ можно представить в виде требуемого объединения только одним способом; множество $\{1;2;3;4\}$ можно представить в виде объединения тремя способами: $\{1;2\}\bigcup\{3;4\}$, $\{2;3\}\bigcup\{1;4\}$ и $\{1;3\}\bigcup\{2;4\}$.

Введем обозначение:

$$u(n) = \frac{(2n)!}{2^n \cdot n!}.$$

Тогда $u(n)$ - число способов разбиения элементов $2n$-множества на n пар.

Учитывая, что

$$\frac{(2(n+1))!}{2^{n+1} \cdot (n+1)!} = \frac{(2n)! \cdot (2n+1) \cdot (2n+n)}{2^n \cdot n! \cdot 2 \cdot (n+1)} = \frac{(2n)!}{2^n \cdot n!} \cdot (2n+1),$$

то

$$u(n+1) = (2n+1) \cdot u(n), u(1) = 1.$$

В частности получаем:

$$u(1) = 1, u(2) = 3, u(3) = 15, u(4) = 105, u(5) = 945, u(6) = 10395, u(7) = 135135.$$

Каждая запись $\{a^1;a^2\}\bigcup\{a^3;a^4\}\bigcup\ldots\bigcup\{a^{2n-1};a^{2n}\}$ множества $\{1;2;\ldots;2n-1;2n\}$ в виде объединения подмножеств, каждое из которых содержит по два элемента, может быть охарактеризовано строкой $a^1 a^2 a^3 a^4 \ldots a^{2n-1} a^{2n}$, элементами которой являются числа $1, 2, \ldots, 2n-1, 2n$, расположенные в некотором порядке. Такие строки назовем строками пар элементов $2n$-множества $\{1;2;\ldots;2n-1;2n\}$. При этом две строки $a^1a^2a^3a^4\dots a^{2n-1}a^{2n}$ и $b^1b^2b^3b^4\dots b^{2n-1}b^{2n}$, где $a^1,a^2,a^3,\dots,a^{2n}$, также как и $b^1,b^2,b^3,\dots,b^{2n}$, - попарно различные числа из множества $\{1;2;\dots;2n-1;2n\}$, следует считать равными, если для любого k найдется ℓ такое, что верно равенство $a^{2k-1}a^{2k}=b^{2\ell-1}b^{2\ell}$, и различными, если для некоторого k и любого ℓ верны неравенства $a^{2k-1}a^{2k}\neq b^{2\ell-1}b^{2\ell}$, где $k,\ell\in\{1;2;\dots;n\}$. Также следует считать, что $a^{2k-1}a^{2k}=b^{2k}b^{2k+1}$, так как $\{a^{2k-1};a^{2k}\}=\{a^{2k};a^{2k+1}\}$. Например, строки пар элементов 4-множества $\{1;2;3;4\}$ вида 3214, 1432 и 2314 являются равными, строки же 1234 и 3214 - различные.

При необходимости между элементами строки пар элементов будем ставить запятую. Если строка A представляется в виде приписывания к строке D строки E справа, то будем писать: $A=DE$.

Пусть A - строка пар элементов $2n$-множества $\{1;2;\dots;2n-1;2n\}$ и $m\in\{1;2;\dots;n\}$. Символом $C(A;m)$ обозначим строку, получаемую из строки A путем замены в ней числа m на число $2n+1$. Отметим некоторые свойства предложенного преобразования строк.

1. Если A - строка пар элементов $2n$-множества $\{1;2;\dots;2n-1;2n\}$, m,ℓ - различные числа из множества $\{1;2;\dots;n\}$, то $C(A;m),m,2n+2$ и $C(A;\ell),\ell,2n+2$ - различные строки пар элементов $(2n+2)$-множества $\{1;2;\dots;2n;2n+1;2n+2\}$.

Пусть $A=a^1a^2a^3a^4\dots a^{2n-1}a^{2n}$, где $a^1,a^2,a^3,\dots,a^{2n-1},a^{2n}$ - попарно различные числа из множества $\{1;2;\dots;2n-1;2n\}$. Если $a^{2p-1}=m$ и $a^{2q-1}=\ell$, где $p,q\in\{1;2;\dots;n\}$, то

$$C(A;m),m,2n+2=a^1a^2\dots 2n+1a^{2p}\dots a^{2n-1}a^{2n},m,2n+2,$$

$$C(A;\ell),\ell,2n+2=a^1a^2\dots 2n+1a^{2q}\dots a^{2n-1}a^{2n},\ell,2n+2.$$

Так как числа $a^1,a^2,\dots,a^{2n}$ не равны $2n+2$, то $m,2n+2\neq a^{2s-1}a^{2s}$, $m,2n+2\neq 2n+1a^{2q}$ и $m,2n+2\neq\ell,2n+2$ для всех $s\in\{1;2;\dots;n\}\setminus\{q\}$, откуда $C(A;m),m,2n+2\neq C(A;\ell),\ell,2n+2$.

2. Если A,B - различные строки пар элементов $2n$-множества $\{1;2;\dots;2n-1;2n\}$ и $m\in\{1;2;\dots;n\}$, то $C(A;m),m,2n+2$ и $C(B;m),m,2n+2$ - различные строки пар элементов $(2n+2)$-множества $\{1;2;\dots;2n;2n+1;2n+2\}$.

Строки A и B запишем в виде: $A=DA'$ и $B=DB'$, где

$$D=d^1d^2\dots d^{2p-1}d^{2p},A'=a^1a^2\dots a^{2q-1}a^{2q},B'=b^1b^2\dots b^{2q-1}b^{2q},$$

где $2p+2q=2n$, $d^1,d^2,\dots,d^{2p},a^1,a^2,\dots,a^{2q}$, также как и $d^1,d^2,\dots,d^{2p},b^1,b^2,\dots,b^{2q}$, - попарно различные числа из множества $\{1;2;\dots;2n-1;2n\}$ и для любых $k,\ell\in\{1;2;\dots;q\}$ справедливы неравенства: $a^{2k-1}a^{2k}\neq b^{2\ell-1}b^{2\ell}$. Отметим, что $\{a^1;a^2;\dots;a^{2q}\}=\{b^1;b^2;\dots;b^{2q}\}$.

Рассмотрим два случая.

А) $m\in\{d^1;d^2;\dots;d^{2p}\}$.

Пусть $m=d^{2s-1}$, где $s\in\{1;2;\dots;p\}$. Тогда

$$C(A;m),m,2n+2=d^1d^2\dots d^{2p-1}d^{2p}a^1a^2\dots 2n+1a^{2s}\dots a^{2q-1}a^{2q},m,2n+2,$$
$$C(B;m),m,2n+2=d^1d^2\dots 2n+1d^{2s}\dots d^{2p-1}d^{2p}b^1b^2\dots b^{2q-1}b^{2q},m,2n+2.$$

Так как $a^1a^2 \neq d^{2k-1}d^{2k}$, $a^1a^2 \neq b^{2\ell-1}b^{2\ell}$, $a^1a^2 \neq 2n+1d^{2s}$ и $a^1a^2 \neq m,2n+2$ (числа a^1 и a^2 не равны ни $2n+1$, ни $2n+2$) для всех $k \in \{1;2;\ldots;p\}\backslash\{s\}$ и $\ell \in \{1;2;\ldots;q\}$, то получаем, что $C(A;m),m,2n+2 \neq C(B;m),m,2n+2$.

Б) $m \in \{a^1;a^2;\ldots;a^{2q}\} = \{b^1;b^2;\ldots;b^{2q}\}$.

Пусть $m = a^{2s-1} = b^{2t-1}$, где $s,t \in \{1;2;\ldots;q\}$. Так как $a^{2s-1}a^{2s} \neq b^{2t-1}b^{2t}$, то $a^{2s} \neq b^{2t}$. Тогда

$$C(A;m),m,2n+2 = d^1d^2\ldots d^{2p-1}d^{2p}a^1a^2\ldots 2n+1a^{2s}\ldots a^{2q-1}a^{2q},m,2n+2,$$
$$C(B;m),m,2n+2 = d^1d^2\ldots d^{2p-1}d^{2p}b^1b^2\ldots 2n+1b^{2t}\ldots b^{2q-1}b^{2q},m,2n+2.$$

Так как числа $d^1,d^2,\ldots,d^{2p},b^1,b^2,\ldots,b^{2q},m$ принадлежат множеству $\{1;2;\ldots;2n-1;2n\}$, то $2n+1a^{2s} \neq d^{2k-1}d^{2k}$, $2n+1a^{2s} \neq b^{2\ell-1}b^{2\ell}$, $2n+1a^{2s} \neq 2n+1b^{2s}$ и $2n+1a^{2s} \neq m,2n+2$ для всех $k \in \{1;2;\ldots;p\}$ и $\ell \in \{1;2;\ldots;q\}\backslash\{t\}$, откуда $C(A;m),m,2n+2 \neq C(B;m),m,2n+2$.

Используя рассмотренный способ переработки строк, можно сгенерировать строки пар элементов множества с четным числом элементов. Дадим описание генерации.

Пусть выписаны все строки пар $2n$-элементного множества $\{1;2;\ldots;2n-1;2n\}$:

$$\begin{array}{rcl} A_1 & = & a_1^1a_1^2a_1^3a_1^4\ldots a_1^{2n-1}a_1^{2n}, \\ A_2 & = & a_2^1a_2^2a_2^3a_2^4\ldots a_2^{2n-1}a_2^{2n}, \\ \ldots & & \\ A_{u(n)} & = & a_{u(n)}^1a_{u(n)}^2a_{u(n)}^3a_{u(n)}^4\ldots a_{u(n)}^{2n-1}a_{u(n)}^{2n}, \end{array}$$

где $a_i^1,a_i^2,a_i^3,a_i^4,\ldots,a_i^{2n-1},a_i^{2n}$ - попарно различные числа из множества $\{1;2;\ldots;2n-1;2n\}$ для всех $i \in \{1;2;\ldots;u(n)\}$.

Пусть $i \in \{1;2;\ldots;u(n)\}$ и $k \in \{1;2;\ldots;2n-1;2n\}$. Рассмотрим строки следующего вида:

$$\begin{array}{l} A_1,2n+1,2n+2,A_2,2n+1,2n+2,\ldots,A_{u(n)},2n+1,2n+2, \\ C(A_1;1),1,2n+2,C(A_2;1),1,2n+2,\ldots,C(A_{u(n)};1),1,2n+2, \\ C(A_1;2),2,2n+2,C(A_2;2),2,2n+2,\ldots,C(A_{u(n)};2),2,2n+2, \\ \ldots \\ C(A_1;2n),2n,2n+2,C(A_2;2n),2n,2n+2,\ldots,C(A_{u(n)};2n),2n,2n+2. \end{array}$$

Каждая строка состоит из $2n+2$ различных чисел из множества $\{1;2;\ldots;;2n+1;2n+2\}$. Количество строк равно $u(n)\cdot(2n+1)$. При этом все представленные строки различны:

1) если $i \neq j$, то $A_i,2n+1,2n \neq C(A_j;k),k,2n+2$;

2) если $k \neq \ell$, то $C(A_i;k),k,2n+2 \neq C(A_j;\ell),\ell,2n+2$;

3) если $i \neq j$, то $C(A_i;k),k,2n+2 \neq C(A_j;k),k,2n+2$

для всех $k,\ell \in \{1;2;\ldots;2n\}$ и $i,j \in \{1;2;\ldots;u(n)\}$. Учитывая, что $u(n)\cdot(2n+1) = u(n+1)$, получаем, что составленные строки есть строки пар элементов $(2n+2)$-множества $\{1;2;\ldots;;2n+1;2n+2\}$.

Итак, генерировать строки пар элементов $(2n+2)$-множества можно рекуррентно, отталкиваясь от уже созданных строк пар элементов $2n$-множества. Рассмотренное рекуррентное правило генерации строк будет заложено в основы программы.

На примерах данный способ порождения строк пар элементов множества выглядит следующим образом. Если нужно получить все строки пар элементов 4-множества $\{1;2;3;4\}$, то сначала берутся строки пар элементов 2-множества $\{1;2\}$, количество которых равно 1: $A_1 = 12$. Тогда нужные строки пар элементов имеют вид:

$$A_1 34 = 1234, C(A_1;1)14 = 3214, C(A_1;2)24 = 1324.$$

Количество строк равно 3.

Занумеровав строки пар элементов 4-множества

$$A_1 = 1234, A_2 = 3214, A_3 = 1324,$$

получаем строки пар элементов 6-множества $\{1;2;3;4;5;6\}$:

$$\begin{array}{rrr} A_1 56 = 123456, & A_2 56 = 321456, & A_3 56 = 132456, \\ C(A_1;1)16 = 523416, & C(A_2;1)16 = 325416, & C(A_3;1)16 = 532416, \\ C(A_1;2)26 = 153426, & C(A_2;2)26 = 351426, & C(A_3;2)26 = 135426, \\ C(A_1;3)36 = 125436, & C(A_2;3)36 = 521436, & C(A_3;3)36 = 152436, \\ C(A_1;4)46 = 123546, & C(A_2;4)46 = 321546, & C(A_3;4)46 = 132546. \end{array}$$

Итого получается 15 строк пар элементов 6-множества.

Программная реализация. Программа для порождения всех строк пар элементов n-множества $\{1;2;\ldots;n\}$ для четного натурального числа n в СКМ Maple может выглядеть следующим образом:

```
1  n:= входной параметр:
2  nn:=n!/(2\^{}(n/2)*(n/2)!):
3  PM:=matrix(nn,n,[1,2]):r\_bl:=1:c\_bl:=2:
4  for q from 0 to n/2-2 do
5    p:=2*q+3:r\_bl:=r\_bl*(2*q+1):c\_bl:=2*(q+1):
6    for i from 1 to r\_bl*(2*q+3) do PM[i,c\_bl+1]:=c\_bl+1: PM[i,c\
        _bl+2]:=c\_bl+2: od:
7    for t from 1 to p-1 do
8      for i from 1 to r\_bl do PM[t*r\_bl+i,c\_bl+1]:=t od;
9      for i from 1 to r\_bl do for j from 1 to c\_bl do
10       if PM[i,j]=t then PM[t*r\_bl+i,j]:=p else PM[t*r\_bl+i,j]:=PM
            [i,j] fi od; od;
11   od:
12 od:
13 evalm(PM);
```

Предоставим некоторые комментарии к программе и ее работе.

Строки пар элементов n-множества $\{1;2;\ldots;n\}$ при четном входном параметре n хранятся в матрице PM, размерность которой равна $u(n/2)\times n$ (строки 1-3 программы). Вначале в матрице PM определяются элементы $PM_{1,1} = 1$ и $PM_{1,2} = 2$, остальные элементы матрицы PM остаются неопределенными, и матрица PM имеет вид:

На следующем шаге при q равном 0 (строка 4 программы) определяются элементы матрицы PM, находящиеся в ее подматрице (блоке) размерности 3×4, элементы которой соответствуют случаю $n = 4$, остальные элементы матрицы PM временно не определены. Матрица PM принимает вид:

$$PM = \begin{vmatrix} 1 & 2 & PM_{1,3} & \dots & PM_{1,n} \\ PM_{2,1} & PM_{2,2} & PM_{2,3} & \dots & PM_{2,n} \\ \dots \\ PM_{u(n),1} & PM_{u(n),2} & PM_{u(n),3} & \dots & PM_{u(n),n} \end{vmatrix}$$

$$PM = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & PM_{1,5} & \dots & PM_{1,n} \\ 3 & 2 & 1 & 4 & PM_{2,5} & \dots & PM_{2,n} \\ 1 & 3 & 2 & 4 & PM_{3,5} & \dots & PM_{3,n} \\ PM_{4,1} & PM_{4,2} & PM_{4,3} & PM_{4,4} & PM_{4,5} & \dots & PM_{4,n} \\ \dots \\ PM_{u(n),1} & PM_{u(n),2} & PM_{u(n),3} & PM_{u(n),4} & PM_{u(n),5} & \dots & PM_{u(n),n} \end{vmatrix}$$

и так далее, пока не будут определены все элементы матрицы PM.

На каждом шаге генерации строк вычисляются длина и высота подматрицы (блока), которым соответствуют переменные r_bl и c_bl (3 и 5 строки программы).

Порождение следующего блока начинается с записи двух новых последовательных чисел, не входящих в предыдущий сгенерированный блок, во все строки матрицы PM с 1 строки до r_bl*(2*q+3) включительно (строка 6 программы). Затем генерируется новый блок в матрице PM (строки 7-11 программы) согласно рекуррентному правилу образования строк пар элементов множества, описанного в теоретической части статьи.

Вывод матрицы PM осуществляется командой evalm(PM); (строка 13 программы).

Демонстрационная задача. Рассмотрим следующую игру.

Пусть из одинаковых квадратов, одна сторона которых белая, другая - черная, складывается прямоугольник. Будем говорить, что задано поле П.

За ход в игре принимается преобразование поля, заключающееся в переворачивании двух соседних по вертикали или горизонтали квадрата поля. Цель игры в том, чтобы за конечное число ходов исходное поле привести к наперед заданному полю.

Для достижения цели применяется одно преобразование к исходному полю, потом к полученному полю применяется еще одно преобразование и так далее. При этом и будем говорить, что одно поле приводится к другому полю с использованием преобразованием полей.

Полю П можно сопоставить матрицу $M(\Pi)$ (и наоборот) тем образом, что черной клетке сопоставляется 1, а белой - 0. Совершение преобразования над полем П приводит к тому, что к матрице $M(\Pi)$ прибавляется матрица, в записи которой только два соседних элемента в одной строке или столбце равны 1, и наоборот.

Можно показать:

1) поле Π_1 может быть приведено к полю Π_2 с использованием преобразований полей, если и только если сумма $M(\Pi_1) + M(\Pi_2)$ содержит четное число единиц, считая, что суммирование элементов матриц ведется с опорой на равенства:

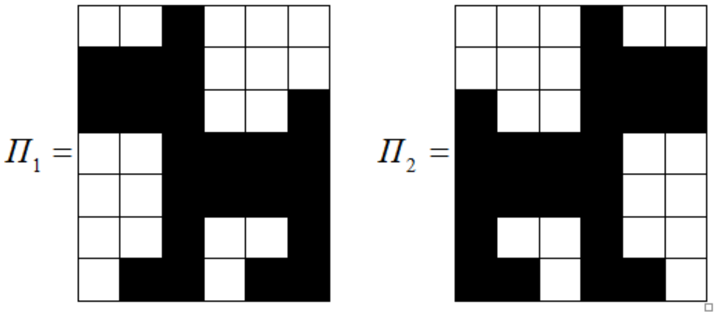

Рис. 1. Поля «зеркально отраженные собачки».

$1 + 0 = 0 + 1 = 1$ и $0 + 0 = 1 + 1 = 0$;

2) матрицу с четным количеством единиц можно представить в виде суммы матриц, в которых только две единицы, являющиеся в строке или столбце соседними.

Поля, преобразуемые одно в другое, назовем эквивалентными.

Например, пусть поля Π_1 и Π_2 имеют вид, представленный на рисунке 1.

Так как

$$M(\Pi_1)+M(\Pi_2)=\begin{bmatrix}0&0&1&0&0&0\\1&1&1&0&0&0\\1&1&1&0&0&1\\0&0&1&1&1&1\\0&0&1&1&1&1\\0&0&1&0&0&1\\0&1&1&0&1&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0&0&1&0&0\\0&0&0&1&1&1\\1&0&0&1&1&1\\1&1&1&1&0&0\\1&1&1&1&0&0\\1&0&0&1&0&0\\1&1&0&1&1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&1&1&0&0\\1&1&1&1&1&1\\0&1&1&1&1&0\\1&1&0&0&1&1\\1&1&0&0&1&1\\1&0&1&1&0&1\\1&0&1&1&0&1\end{bmatrix}$$

и в матрице-результате содержится 28 единиц, то Π_1 и Π_2 - эквивалентные поля.

Пусть поля Π_1 и Π_2 являются эквивалентными. Тогда матрицы $M(\Pi_2)$ и $M(\Pi_2)$ связаны равенством: $M(\Pi_2) = M(\Pi_1) + DU_1 + DU_2 + \ldots + DU_s$, где $DU_1, DU_2, \ldots, DU_s$ - матрицы, в каждой из которых содержится ровно две рядом стоящие в строке или столбце единицы (эти матрицы назовем матрицами со сдвоенными единицами).

Сформулируем задачу об эквивалентных полях: найти минимальное количества преобразований, приводящих одно поле в другое.

Для решения задачи минимизации числа последовательных преобразований можно поступить следующим образом. Найти сумму матриц $M(\Pi_2)$ и $M(\Pi_2)$, все единицы получившейся матрицы занумеровать, разбить их на пары и выбрать разбиение, для которого минимум суммы расстояний между парами единиц минимально, считая, что расстояние между $(i; j)$- и $(p; q)$-элементами матрицы равно $|p - i| + |q - j|$. Затем представить матрицу $M(\Pi_1) + M(\Pi_2)$ в виде суммы матриц, в каждую из которой входят единицы из полученного разбиения единиц на пары. Каждую матрицу-слагаемое представить в виде суммы матриц со сдвоенными единицами.

Расстояния между единицами матрицы занесем в матрицу расстояний.

Рассмотрим пример. Пусть даны поля Π_1 и Π_2 (рис. 2).

$\Pi_1 =$ $\Pi_2 =$

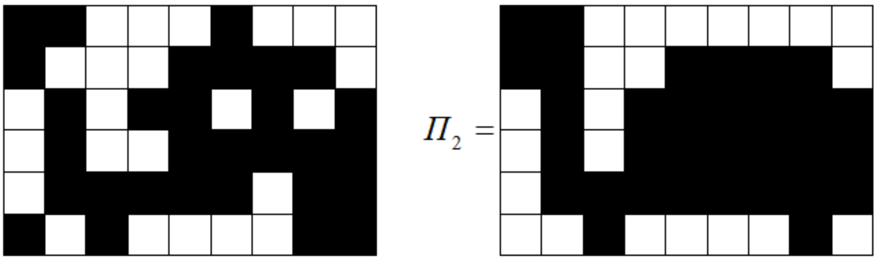

Рис. 2. Поля «хаос» и «черепаха».

Так как

$$M(\Pi_1)+M(\Pi_2)=$$
$$=\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|}\hline 1&1&0&0&0&1&0&0&0\\\hline 1&0&0&0&1&1&1&1&0\\\hline 0&1&0&1&1&0&1&0&1\\\hline 0&1&0&0&1&1&1&1&1\\\hline 0&1&1&1&1&1&0&1&1\\\hline 1&0&1&0&0&0&0&1&1\\\hline\end{array} + \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|}\hline 1&1&0&0&0&0&0&0&0\\\hline 1&1&0&0&1&1&1&1&0\\\hline 0&1&0&1&1&1&1&1&1\\\hline 0&1&0&1&1&1&1&1&1\\\hline 0&1&1&1&1&1&1&1&1\\\hline 0&0&1&0&0&0&0&1&0\\\hline\end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|}\hline 0&0&0&0&0&1_1&0&0&0\\\hline 0&1_2&0&0&0&0&0&0&0\\\hline 0&0&0&0&0&1_3&0&1_4&0\\\hline 0&0&0&1_5&0&0&0&0&0\\\hline 0&0&0&0&0&0&1_6&0&0\\\hline 1_7&0&0&0&0&0&0&0&1_8\\\hline\end{array}$$

и матрица-сумма содержит четное число единиц, то поля Π_1 и Π_2 эквивалентны.

Единицы в матрице $M(\Pi_1)+M(\Pi_2)$ занумеруем от 1 до 8 (номера указаны нижними индексами).

Разбиение множества единиц на пары способствует:

1) составлению матрицы расстояний между единицами матрицы;

2) нахождения суммы расстояний между единицами матрицы в парах.

Программа для вычислений в СКМ Maple имеет вид:

```
1  V:=[[1,6],[2,2],[3,6],[3,8],[4,4],[5,7],[6,1],[6,9]];
2  n:=nops(V): MR:=array(1..n,1..n):
3  for i from 1 to n do for j from 1 to n do
4    MR[i,j]:= abs(V[i][1]-V[j][1])+abs(V[i][2]-V[j][2]) od; od;
5  evalm(MR);
6  R:=[]:
7  for i from 1 to nn do S:=0:
8    for j from 1 by 2 to n do S:=S+MR[PM[i,j],PM[i,j+1]] od;
9    R:=[op(R),[S,i]]
10 od: R;
```

Единицы матрицы $M(\Pi_1)+M(\Pi_2)$ хранятся в матрице V (строка 1 программы). Так как число единиц равно 8, то матрица PM содержит 105 строк и 8 столбцов.

Матрица MR - матрица расстояний между единицами (строка 2-5 программы), S - матрица сумм расстояний между парами единиц матрицы (строки 7-10 программы), для генерации которой используется матрица PM строк пар элементов 8-множества. Матрица R (строки 6 и 10 программы) содержит сумму и номер строки матрицы PM, по которой была получена сумма.

Матрица расстояний между единицами матрицы $M(\Pi_1)+M(\Pi_2)$ имеет вид:

Минимальная сумма расстояний между парами единиц равна 15 и достигается это значение на 5 строках матрицы PM: 13275648, 12345768, 15342768, 35142768,

$$S = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|}
\hline
0 & 5 & 2 & 4 & 5 & 5 & 10 & 8 \\ \hline
5 & 0 & 5 & 7 & 4 & 8 & 5 & 11 \\ \hline
2 & 5 & 0 & 2 & 3 & 3 & 8 & 6 \\ \hline
4 & 7 & 2 & 0 & 5 & 3 & 10 & 4 \\ \hline
5 & 4 & 3 & 5 & 0 & 4 & 5 & 7 \\ \hline
5 & 8 & 3 & 3 & 4 & 0 & 7 & 3 \\ \hline
10 & 5 & 6 & 10 & 5 & 7 & 0 & 8 \\ \hline
8 & 11 & 8 & 4 & 7 & 3 & 8 & 0 \\ \hline
\end{array}$$

13542768. Разбивая строки на пары, начиная с самого левого элемента, получаем информацию о том, какие единицы матрицы следует соединять. Если в матрице центры ячеек, в которых находятся единицы, соединить, то получаем схемы соединения единиц.

Исходя из расчетов, получаем 5 схем соединения единиц матрицы $M(\Pi_1)+M(\Pi_2)$, представленные на рисунках 3 и 4.

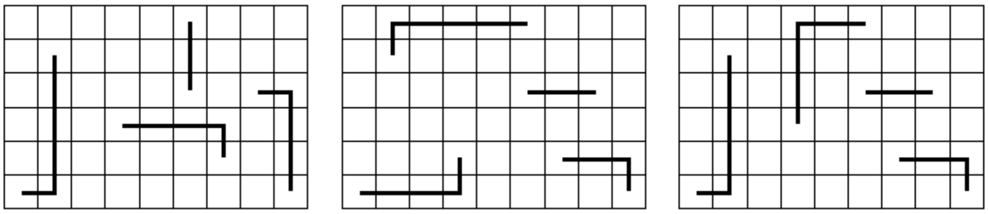

Рис. 3. Схемы соединения единиц матрицы по парам.

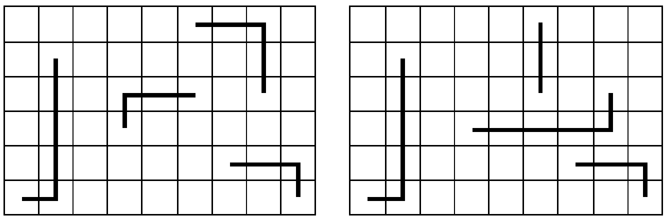

Рис. 4. Схемы соединения единиц матрицы по парам.

Выбирая одну из предложенных схем, раскладываем матрицу $M(\Pi_1)+M(\Pi_2)$ в виде суммы матриц со сдвоенными единицами, каждая из которых определяет преобразование поля. В сумме общее количество матриц со сдвоенными единицами равно 15. Тем самым из «хаоса» сотворить «черепаху» можно за 15 преобразований.

Литература

1. Виленкин Н.Я. Комбинаторика / Н.Я. Виленкин. - М.: Наука, 1969. - 323 с.

2. Иванов Б.Н. Дискретная математика. Алгоритмы и программы. / Б.Н. Иванов. - М.: Лаборатория Базовых знаний, 2001. - 288 с.

3. Говорухин В.Н. Введение в Maple. Математический пакет для всех. / В.Н. Говорухин, В.Г. Цибулин. - М.: Мир, 1997. - 208 с.

4. Безумова О.Л. Игры на черно-белых полях / О.Л. Безумова, С.Н. Котова, И.Н. Попов // Научно-исследовательская деятельность школьников в области математики, прикладной математики и информатики: материалы Восьмой региональной научно-практической конференции. - Архангельск: САФУ, 2016. С. 78-96.

5. Попов И.Н. Группа матриц со сдвоенными единицами / И.Н. Попов // Мир науки и инноваций. - Иваново: Научный мир. - 2015. - Т. 1, вып. 2(2). - С.70-73.

SPLITTING OF ELEMENTS OF THE SET INTO PAIRS:
GENERATION AND APPLICATION

I.N. Popov

The paper proposes a theoretically justified algorithm for the generation of pairs of a set elements. An SCA Maple program is made on the basis of the presented algorithm. We consider a combinatorial optimization problem whose solution uses the enumeration method based on the splitting of the set into pairs of elements and the calculations that involve the presented computer programs.

Keywords: programming, set, combinatorics.

УДК 004.9+378.4+510.22+512+519.2

ИНТЕРАКТИВНОЕ УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ ПО АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ И ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ С ПРИМЕНЕНИЕМ СИСТЕМЫ КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ MAPLE

А.Р. Самигуллина[1]

1 *alsu_sam@rambler.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет

Описан интерактивное учебное пособие, который содержит краткое изложение вопросов высшей математики, входящих в курс «Аналитическая геометрия и линейная алгебра» для студентов физических и информационных специализаций и естественнонаучных специализаций. Курс снабжен примерами решения задач в системе компьютерной математики Maple и инструкциями по применению этой системы для студентов и преподавателей.

Ключевые слова: физико - математическое образование, системы компьютерной математики, Maple, система аналитического тестирования, математическое моделирование.

Интерактивное учебное пособие содержит краткое изложение вопросов линейной алгебры и аналитической геометрии, входящих в курсы линейной алгебры и аналитической геометрии для студентов физических и информационных специализаций, а также курса высшей математики для студентов естественнонаучных специализаций. В пособии подробно рассмотрено решение основных задач этих курсов. Отличительной особенностью пособия является интеграция обычных методов решения задач с методами их решения в системе компьютерной математики (СКМ) Maple [1], [2]. Таким образом, Авторы хотели приобщить студентов к современным